XVIII

Piloto 1
04 de julio del 2020
Soluciones
Individual

Primer Nivel

1 En la figura se muestran los diez botones de los dígitos de un teléfono móvil:

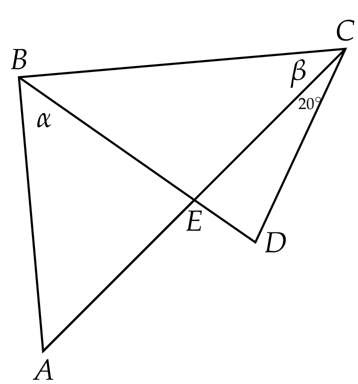
1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Una hormiga camina sobre estos botones. Ella puede comenzar a caminar en cualquier botón, pero para moverse de uno a otro es necesario que ellos tengan un lado en común. Por ejemplo: si la hormiga está en el botón 3, entonces sólo puede caminar hacia los botones 2 y 6. Determine si es posible que la hormiga visite todos los botones, pasando exactamente una vez sobre cada uno. Justifique su respuesta.
Aclaración: No es necesario que la hormiga vuelva al botón donde comenzó a caminar.

Solución

Coloree los botones 2, 4, 6 y 8 con blanco, y los otros botones con negro. La hormiga debe visitar alternadamente botones blancos y negros. Si fuera posible que visite todos los botones, exactamente una vez cada uno, entonces ha pasado por cinco botones de cada color, lo que no es cierto. Por lo tanto no es posible lo que se pide comprobar.

2 En la figura, $AE = BE = CE = CD$, los puntos A, E y C son colineales y los puntos B, E y D son colineales. Sabiendo que el ángulo $\angle ECD$ mide $20°$, determine el valor de $\frac{\beta}{\alpha}$.



Solución

Los $\triangle AEB$, $\triangle DCE$ y $\triangle CEB$ son isósceles, luego

$$\begin{aligned} \sphericalangle ECB = \sphericalangle EBC &= \beta \\ \sphericalangle BAE = \sphericalangle EBA &= \alpha \\ \sphericalangle CED = \sphericalangle CDE &= 80^\circ \end{aligned}$$

Puesto que la suma de dos ángulos interiores de un triángulo es igual al ángulo exterior respectivo, no considerado, se tiene:

$$\begin{aligned} 2\beta = & \ 80^\circ \longrightarrow \beta = 40^\circ \\ 2\alpha = & 100^\circ \longrightarrow \alpha = 50^\circ \end{aligned}$$

Por lo anterior $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{40^\circ}{50^\circ} = \dfrac{4}{5}$.

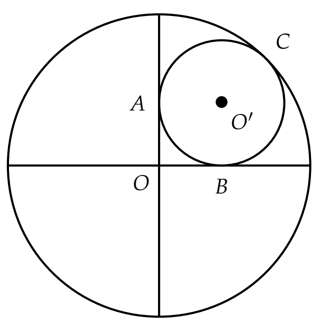
Segundo Nivel

1 Pruebe que la suma de 4 números enteros positivos consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.

Solución

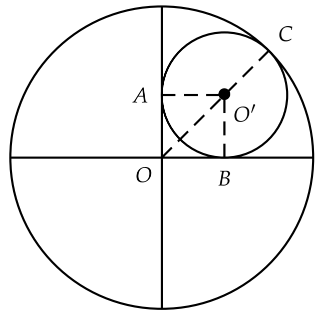
Llamemos a los números: a, $a+1$, $a+2$, $a+3$. Luego la suma es $4a+6 = 2(2a+3)$. Notemos que este número es par, pero no divisible por 4, luego no puede ser un cuadrado.

2 En una circunferencia con centro O y radio r se dibujan dos diámetros perpendiculares entre sí. Se dibuja otra circunferencia con centro O' y radio r', tangente a los diámetros dibujados en los puntos A y B y tangente interiormente a la otra circunferencia en el punto C. Determine r' en términos de r.



Solución

El cuadrilátero $OAO'B$ tiene tres ángulos rectos (en O por los diámetros perpendiculares; en A y B por los radios de tangencia), entonces es un rectángulo. Además, $O'A = r' = O'B$, entonces $OAO'B$ es un cuadrado con lado r'. Se dibuja el radio $\overline{OC}$ que pasa por O'.



Acá, $\overline{OO'}$ es la diagonal de un cuadrado de lado r', entonces $OO' = r' \cdot \sqrt{2}$. Por lo tanto:

$$r = OC = OO' + O'C = r' \cdot \sqrt{2} + r' = r'(1+\sqrt{2}) \Rightarrow r' = \frac{r}{1+\sqrt{2}} = r \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

Tercer Nivel

1 Sea n el mayor múltiplo de 36 tal que todos sus dígitos son pares y distintos entre sí. Encuentre los 3 últimos dígitos de n.

Solución

Notar que $36 = 4 \cdot 9$ y por tanto $9 \mid n$, así que la suma de sus dígitos es divisible por 9. Considerando la segunda condición del problema el mayor n posible partirá de 86420, luego 86402, etc. Notemos que 86420 y sus permutaciones no son divisibles por 9, así que habrá que eliminar al menos un dígito para que la suma sea divisible por 9, obviamente nos conviene eliminar los menores dígitos para así alcanzar el máximo y eliminar el 0 no tiene sentido. Eliminamos el 2 y nos queda 8640 como máximo y que obviamente es divisible por 36, luego la respuesta es 640.

2 Sean $\triangle ABC$ un triángulo y D un punto cualquiera en el lado $\overline{BC}$. Por D se dibuja una recta paralela a $\overline{AB}$ que intersecta al lado $\overline{AC}$ en E. Por E se dibuja una recta paralela a $\overline{AD}$ que intersecta al lado $\overline{BC}$ en F. Pruebe que

$$(CD)^2 = (BC) \cdot (CF).$$

Solución

Por Thales:

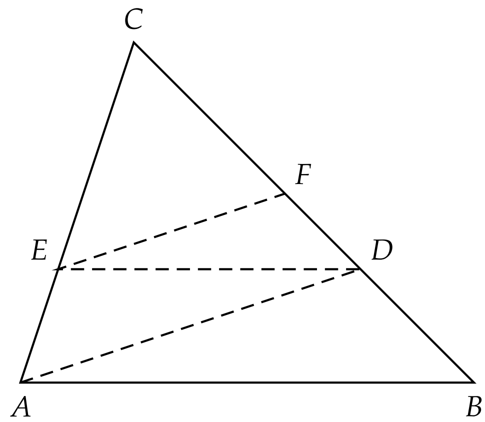
(i) $\dfrac{(CD)}{(CF)} = \dfrac{(CA)}{(CE)}$ considerando $EF||AD$

(ii) $\dfrac{(CB)}{(CD)} = \dfrac{(CA)}{(CE)}$ considerando $ED||AB$

Igualando (i) con (ii) tenemos:

$$\frac{(CD)}{(CF)} = \frac{(CB)}{(CD)} \Rightarrow (CD)^2 = (BC)\,(CF)$$

$\blacksquare$



Cuarto Nivel

1 Se tienen cuatro esferas de radio r, cada una es tangente a las otras tres. Ellas son guardadas en una caja rectangular (cerrada) de manera tal que:

- Una de las caras de la caja es tangente a tres de las esferas y otra de las caras de la caja es tangente a dos de las esferas; estas dos caras tienen un lado común.
- Cada una de las otras cuatro caras de la caja es tangente a sólo una esfera.

Determine las dimensiones de la caja.

Solución

Los centros de las esferas determinan un tetraedro regular de arista $2r$ que llamaremos $ABCD$. En este tetraedro, sean a la longitud de una arista, h la longitud de la altura en una cara y l la longitud de la "altura" (es decir, la distancia desde un vértice hasta la cara opuesta). Por las condiciones de tangencia entre las esferas y las caras de la caja, las dimensiones de esta última son $a + 2r$, $h + 2r$ y $l + 2r$.
En el triángulo $\triangle ABC$, la arista es $a = 2r$ y la altura es $h = r\sqrt{3}$ (por el teorema de Pitágoras). En el tetraedro $ABCD$, sea $\overline{DP}$ una "altura". Usando el teorema de Pitágoras, se tiene que $PA = PB = PC$, entonces $PA = \dfrac{2}{3} \cdot h = \dfrac{2}{3} \cdot r\sqrt{3}$. Nuevamente por el teorema de Pitágoras, $l^2 = 4r^2 - \dfrac{4}{3} \cdot r^2 = \dfrac{8}{3} \cdot r^2$, entonces $l = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \cdot r$. Finalmente, las dimensiones de la caja son $4r$, $(2 + \sqrt{3})r$ y $\dfrac{6 + 2\sqrt{6}}{3} \cdot r$.

2 Encuentre todos los tríos (a, b, c) de números enteros positivos consecutivos tales que:

$$a < b < c, \qquad a^c + b^b + c^a = c^3 - (a + b).$$

Solución

Observe lo siguiente:

$$c^3 > c^3 - (a + b) = a^c + b^b + c^a > c^a,$$

es decir, $c^3 > c^a$. Como $c = a + 2 \geq 3$, entonces $3 > a$, es decir, $a \in \{1, 2\}$.
Si $(a, b, c) = (1, 2, 3)$, al reemplazar en la igualdad se tiene $1^3 + 2^2 + 3^1 = 3^3 - (1 + 2)$, que es falso. Si $(a, b, c) = (2, 3, 4)$, al reemplazar en la igualdad se tiene $2^4 + 3^3 + 4^2 = 4^3 - (2 + 3)$, que es verdadero. Por lo tanto, la única solución es el trío $(2, 3, 4)$.