CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas

XVIII

Piloto 1
04 de julio del 2020
Soluciones
Grupal

Triangulaciones y cuadrangulaciones

Durante la prueba, denotaremos por P_m un polígono regular de m lados, y llamaremos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a sus vértices. Por ejemplo, P_3 es un triángulo equilátero, P_4 es un cuadrado y P_5 es un pentágono regular. Siempre dibujaremos P_m inscrito en un círculo. Una diagonal es un segmento conectando dos vértices no consecutivos del polígono.

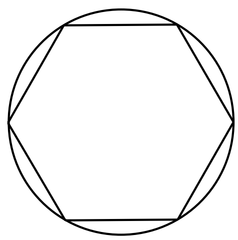


Figura 1: El polígono P_6.

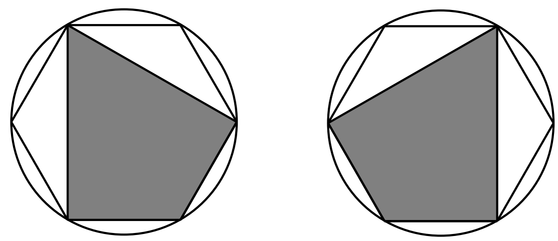
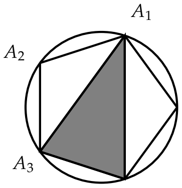


Figura 2: Ejemplo de dos cuadriláteros distintos en P_6.

Observación: En esta prueba sólo serán considerados polígonos con ángulos interiores menores a 180°. Además, si dos polígonos tienen vértices distintos se consideran distintos.

Problema 1. Dibuje todos los triángulos que pueden formarse con los vértices de P_5. ¿Cuántos son? La figura incluye un ejemplo



Solución:

Son diez en total: $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_5$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_3A_5$, $A_1A_4A_5$, $A_2A_3A_4$, $A_2A_3A_5$, $A_2A_4A_5$, $A_3A_4A_5$.

■

Problema 2.

(a) En P_{10}, ¿cuántos triángulos con vértices en P_{10} tienen a la diagonal A_1A_6 como lado?

(b) En el mismo P_{10}, ¿cuántos cuadriláteros con vértices en P_{10} tienen a la diagonal A_1A_6 como lado?

Solución:

(a) Si A_1A_6 es un lado, ya tenemos dos de los vértices del triángulo: A_1 y A_6. Nos falta elegir el tercero, que puede ser $A_2, A_3, A_4, A_5, A_7, A_8, A_9, A_{10}$. Esto da 8 triángulos.

(b) Igual que antes, tenemos ya dos vértices, A_1 y A_6. Ahora bien, para que A_1A_6 sea un lado (y no una diagonal) del cuadrilátero, los otros vértices deben estar al mismo lado de A_1A_6.

Si elegimos los vértices en $\{A_2, A_3, A_4, A_5\}$, tenemos seis parejas posibles

$$A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5,$$

y otras seis si elegimos en $\{A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$. Esto da 12 cuadriláteros.

■

Problema 3.

(a) Dibuje todos los cuadriláteros cuyos lados sean diagonales completas o lados de P_6. ¿Cuántos cuadriláteros son en total?

(b) Cuente el número de cuadriláteros cuyos lados sean diagonales completas o lados de P_8. No es necesario dibujarlos todos. Se puede ver un ejemplo para el caso de P_6 en la Figura 2.

Solución:

(a) Podemos dar una lista explícita, a saber,

$$\begin{array}{lllll} A_1A_2A_3A_4, & A_1A_2A_3A_5, & A_1A_2A_3A_6, & A_1A_2A_4A_5, & A_1A_2A_4A_6, \\ A_1A_2A_5A_6, & A_1A_3A_4A_5, & A_1A_3A_4A_6, & A_1A_3A_5A_6, & A_1A_4A_5A_6, \\ A_2A_3A_4A_5, & A_2A_3A_4A_6, & A_2A_3A_5A_6, & A_2A_4A_5A_6, & A_3A_4A_5A_6. \end{array}$$

En total, obtenemos 15 cuadriláteros.

(b) El problema es equivalente a elegir cuatro vértices de P_8. El primero podemos tomarlo de 8 maneras distintas, el segundo de 7, el tercer de 6 y el cuarto de 5. Dividimos por $4! = 24$, para considerar las repeticiones, y obtenemos 70 cuadriláteros.

Para el caso general de P_m, note que cada conjunto de cuatro vértices define un único cuadrilátero. Por lo tanto la respuesta es $C(m, 4) = \binom{m}{4} = m(m-1)(m-2)(m-3)/24$. Luego, en (a) hay $\binom{6}{4} = 15$ y en (b) hay $\binom{8}{4} = 70$ cuadriláteros.

■

Indicación: Para los próximos problemas, puede usar que la suma de los ángulos interiores de un polígono (no necesariamente regular) de n lados, es $180 \cdot (n-2)$ grados.

Una **triangulación** de un polígono es una división del polígono en triángulos, utilizando sólo sus lados y diagonales que no se crucen.

La siguiente figura muestra una triangulación de P_8.

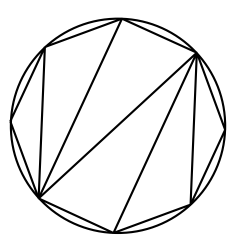


Figura 3: Ejemplo de una triangulación de P_8.

Problema 4. Encuentre todas las triangulaciones de P_6 (con vértices $A_1, \ldots, A_6$) que utilizan la diagonal A_1A_4. ¿Cuántas son?

Solución:

Ya que trazamos esa diagonal, el polígono queda cortado en dos mitades, a saber, los cuadriláteros $A_1A_2A_3A_4$ y $A_1A_4A_5A_6$. En cada uno tenemos dos posibles diagonales, que en total dan cuatro posibles triangulaciones.

■

Problema 5.

(a) Dibuje una triangulación de P_6. ¿Cuántos triángulos tiene?

(b) Demuestre que todas las triangulaciones de P_6 tienen el mismo número de triángulos.

Solución:

Toda triangulación de P_6 tiene exactamente 4 triángulos (nota: pedimos dibujarla, hay puntos por eso también). En general, toda triangulación de P_m usa exactamente $m-2$ triángulos.

Hay varias formas de ver esto. Supongamos que P_m es triangulado. Cada ángulo interior de P_m es particionado en ángulos más pequeños que son parte de los triángulos en la triangulación. Luego la suma de los ángulos interiores de todos los triángulos de la triangulación es igual a la suma de los ángulos interiores de P_m que es igual a $(m-2)\cdot 180°$. Supongamos que hay t triángulos en la triangulación; ya que la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es $180°$, tenemos

$$180\cdot(m-2) = t\cdot 180,$$

de lo cual obtenemos $t = m-2$.

Otra forma de demostrar esto es suponer que la triangulación es creada iterativamente diagonal por diagonal. Sea L_i la suma de los numeros de lados de las figuras de la partición cuando hay i diagonales trazadas y N_i el número de figuras en la partición. Originalmente (cuando no hay diagonales) tenemos una partición de P_m en una sola parte, es decir $L_0 = m$ y $N_0 = 1$.

Cada vez que dibujamos una diagonal, dividimos una figura de la partición en dos partes, las cuales comparten un lado. Esto implica que el número de partes aumenta en 1 y la suma total de lados aumenta en 2. Luego para todo i,

$$L_i = m + 2i, \quad N_i = 1 + i.$$

Supongamos que la triangulación completa usa d diagonales. Esto quiere decir que hay $N_d = d+1$ triángulos y que la suma de los lados de los triángulos es $L_d = m + 2d$. Pero como cada triángulo tiene tres lados, tenemos $L_d = 3N_d$. Juntando todo nos queda

$$m + 2d = 3(d+1) = 3d + 3.$$

De donde obtenemos que en toda triangulación, $d = m-3$ y además el número de triángulos es $N_d = d+1 = m-2$.

■

Problema 6. Si sabemos que hay cinco maneras de triangular P_5, ¿cuántas maneras hay de triangular P_8 utilizando la diagonal A_1A_5?

Solución:

Como trazamos la diagonal A_1A_5, el polígono queda cortado en dos pentágonos, $A_1A_2A_3A_4A_5$ y $A_1A_5A_6A_7A_8$. En cada uno tenemos 5 maneras de triangular, por lo que en total tenemos $5\cdot 5 = 25$ triangulaciones posibles.

■

Una **cuadrangulación** de un polígono es una división del polígono en cuadriláteros, utilizando sólo sus lados y diagonales que no se crucen. La siguiente figura muestra una cuadrangulación de P_8.

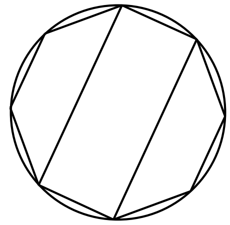


Figura 4: Ejemplo de una cuadrangulación de P_8.

Problema 7. ¿Es posible cuadrangular P_5? ¿Y P_6?

Solución:

Para P_5, ¡no! Para formar un cuadrilátero debemos trazar una diagonal, que separa a la figura en un cuadrilátero y un triángulo. Luego de eso, ya no podemos triangular.

Para P_6 sí es posible, por ejemplo, trazando A_1A_4.

■

Problema 8.

(a) Dibuje una cuadrangulación de P_{12}. ¿Cuántos cuadriláteros tiene?

(b) Demuestre que todas las cuadrangulaciones de P_{12} tienen el mismo número de cuadriláteros.

Solución:

Toda cuadrangulación de P_{12} usa 5 cuadriláteros (nota: pedimos dibujar una, hay puntos por eso también). Para probar esto, podemos usar un argumento similar a la de la solución de la pregunta anterior. Tomemos una cuadrangulación cualquiera de P_{12} usando t cuadriláteros. La suma de los ángulos interiores de P_{12} es $180° \cdot 10 = 1800°$. Esta suma es igual a la suma de los ángulos interiores de todos los cuadriláteros de la cuadrangulación. Como cada uno de ellos aporta $360°$, obtenemos:

$$1800 = 360 \cdot t.$$

De lo cual deducimos que siempre $t = 5$.

■

Problema 9. Demuestre que si m es impar entonces P_m no admite una cuadrangulación.

Solución:

Daremos dos soluciones. Supongamos que m es impar. Si trazamos una diagonal en este polígono, una de las partes seguirá teniendo un número impar de lados (esto es porque la suma del número de lados de ambas partes sigue siendo impar). Afirmamos que siempre habrá una subfigura con número impar de lados. Esto es cierto pues si en algún momento tratamos de subdividirla con una diagonal, una de las dos partes resultantes seguirá teniendo número impar de lados. Por lo tanto, es imposible obtener una cuadrangulación donde todas las partes tienen 4 lados.

Solución alternativa: Supongamos que P_m admite una cuadrangulación usando t cuadrilateros. La suma de los ángulos interiores de P_m es $180° \cdot (m-2)$. Esta suma es igual a la suma de los ángulos interiores de todos los cuadriláteros de la cuadrangulación. Como cada uno de ellos aporta $360°$, obtenemos:

$$180 \cdot (m-2) = 360 \cdot t.$$

De lo cual deducimos que $m = 2t + 2$, que es par.

Nota: Esta última demostración sólo prueba que si existe cuadrangulación entonces m es par (o equivalentemente si m es impar entonces es imposible cuadrangular P_m).

■

Problema 10. Explique como construir una cuadrangulación de P_m cuando m es par.

Solución:

Dado un m par, debemos describir una cuadrangulación de P_m. Sea $m = 2k$. Llamemos $a_1, \ldots, a_{2k}$ a los vértices de P_m en el orden de las manecillas del reloj. Una posible cuadrangulación de P_m es obtenida como en la figura 5.

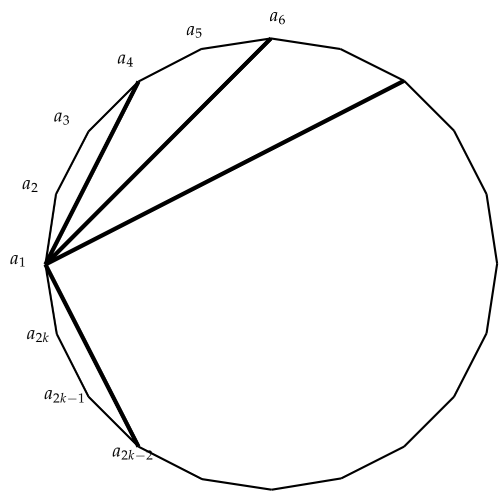


Figura 5: Cuadrangulación de P_m.

Esta se obtiene trazando las diagonales desde a_1 hasta todos los vértices de índice par (excluyendo a_2 y a_{2k}, ya que dichas lineas son lados).

■

Problema 11. Encuentre todos los valores de k para los que existe una partición de un polígono regular de 24 lados usando sólo polígonos de k lados.

Solución:

Supongamos que ya dividimos el polígono de 24 en polígonos de k lados, y digamos que utilizamos t de ellos. Mirando la suma de los ángulos interiores, tenemos la ecuación

$$180^\circ(24-2) = t \cdot 180^\circ(k-2).$$

Dividiendo por 180°, resulta

$$22 = t(k-2).$$

Así, las opciones son $k - 2 = 1, 2, 11$ o 22, equivalentemente

$$k = 3, 4, 13, 24.$$

Con $k = 3$ y $k = 4$ ya sabemos cómo hacer la división (por los problemas anteriores). Para $k = 13$ basta trazar una diagonal mayor (por ejemplo A_1A_{13} sirve). Y para $k = 24$ no trazamos nada.

■

Problema 12. Encuentre todos los valores de k para los que existe una partición de un polígono regular de 2020 lados usando sólo polígonos de k lados.

Solución:

Supongamos que ya dividimos el polígono de 2020 en polígonos de k lados, y digamos que utilizamos t de ellos. Mirando la suma de los ángulos interiores, tenemos la ecuación

$$180^\circ(2020-2) = t \cdot 180^\circ(k-2).$$

Dividiendo por 180°, resulta

$$2018 = t(k-2).$$

Así, las opciones son $k-2 = 1, 2, 1009$ o 2018, equivalentemente

$$k = 3, 4, 1011, 2020.$$

Con $k=3$ y $k=4$ ya sabemos cómo hacer la división (por los problemas anteriores). Para $k=1011$ basta trazar una diagonal mayor (por ejemplo A_1A_{1011} sirve). Y para $k=2020$ no trazamos nada.

■

Problema 13. Dado k, encuentre los valores de m para los cuales P_m admite una partición en polígonos de k lados. Proponga un método que encuentre una partición de P_m en polígonos de k lados cuando esto sea posible.

Solución:

Supongamos que P_m admite una partición en t polígonos de k lados. Los ángulos interiores de P_m suman $180 \cdot (m-2)$ grados. Por otro lado cada polígono de k lados contribuye $180 \cdot (k-2)$ grados al valor total de la suma anterior. Luego:

$$180(m-2) = t \cdot 180(k-2),$$

de lo cual obtenemos que $m = 2 + t(k-2)$. Luego es necesario que m tenga esta forma para algún valor natural de t. Más abajo damos otra prueba de la necesidad de esta condición. Para ver suficiencia, daremos un método que cada vez que $m = 2 + t(k-2)$ encuentre una partición de P_m en t polígonos de k lados. Para ello, llamemos $a_1, \ldots, a_m$ a los vértices de P_m en el orden de las manecillas del reloj. Desde a_1 tracemos la diagonal que toca a a_k y luego una sequencia de $t-2$ diagonales, distanciadas por $k-2$ vertices cada una. Es decir, hemos trazado las diagonales

$$a_1a_k, a_1a_{k+(k-2)}, a_1a_{k+2(k-2)}, \ldots, a_1a_{k+(t-2)(k-2)}.$$

Esto define exactamente t polígonos de k lados: dos de ellos están definidos por 1 diagonal y $k-1$ lados de P_m, y el resto por 2 diagonales y $k-2$ lados de P_m.

Solución alternativa. Considere la diagonal d más corta utilizada en la partición del polígono de m lados (llamemos Q a este polígono). Esta diagonal d divide Q en dos partes, una grande y una pequeña. Es fácil ver que la parte pequeña no puede contener ninguna diagonal de la partición (porque sería una diagonal más corta que d) y por lo tanto la parte pequeña sólo puede ser un polígono de k lados (donde todos sus lados son lados de Q), excepto la diagonal d. La parte grande es un polígono con $m-(k-2)$ vértices y particionado en k-agonos y con una diagonal menos.

Esto muestra que si un pológono de m lados admite una partición, entonces el polígono grande de $m-(k-2)$ vértices también admite una partición con una diagonal menos. Luego, si a es el número de diagonales en el polígono original, entonces $m-(k-2)\cdot a = k$, de donde sigue la condición $m \equiv k \pmod{(k-2)}$. Note que el proceso inductivo también muestra como construir la partición cuando la condición $m \equiv k \pmod{(k-2)}$ se cumple.

■

Preguntas por nivel

Pregunta	Básica	Menor	Mayor
1	2		
2	1+2	1+1	
3	2+0	1+2	1+2
4	2		
5	2+4	1+3	0+2
6		2	2
7	3		
8	2+0	1+3	0+2
9		2	2
10			2
11		3	
12			3
13			4