

Entreguen solo una respuesta por equipo.

Triangulaciones y cuadrangulaciones

Durante la prueba, denotaremos por P_m un polígono regular de m lados, y llamaremos A_1, A_2, \dots, A_m a sus vértices. Por ejemplo, P_3 es un triángulo equilátero, P_4 es un cuadrado y P_5 es un pentágono regular. Siempre dibujaremos P_m inscrito en un círculo. Una diagonal es un segmento conectando dos vértices no consecutivos del polígono.

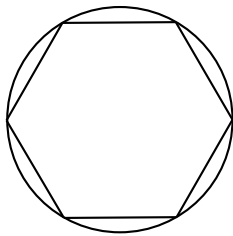


Figura 1: El polígono P_6 .

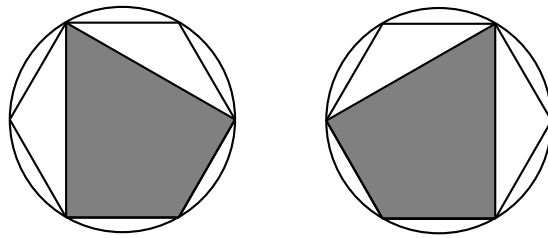


Figura 2: Ejemplo de dos cuadriláteros distintos en P_6 .

Observación: En esta prueba sólo serán considerados polígonos con ángulos interiores menores a 180° . Además, si dos polígonos tienen vértices distintos se consideran distintos.

Problema 1.

- Dibuje todos los cuadriláteros cuyos lados sean diagonales completas o lados de P_6 . ¿Cuántos cuadriláteros son en total?
- Cuente el número de cuadriláteros cuyos lados sean diagonales completas o lados de P_8 . No es necesario dibujarlos todos. Se puede ver un ejemplo para el caso de P_6 en la Figura 2.

Indicación: Para los próximos problemas, puede usar que la suma de los ángulos interiores de un polígono (no necesariamente regular) de n lados, es $180 \cdot (n - 2)$ grados.

Una **triangulación** de un polígono es una división del polígono en triángulos, utilizando sólo sus lados y diagonales que no se crucen.

La siguiente figura muestra una triangulación de P_8 .

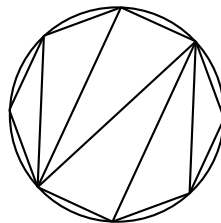


Figura 3: Ejemplo de una triangulación de P_8 .

Problema 2. Demuestre que todas las triangulaciones de P_6 tienen el mismo número de triángulos.

Problema 3. Si sabemos que hay cinco maneras de triangular P_5 , ¿cuántas maneras hay de triangular P_8 utilizando la diagonal A_1A_5 ?

Una **cuadrangulación** de un polígono es una división del polígono en cuadriláteros, utilizando sólo sus lados y diagonales que no se crucen. La siguiente figura muestra una cuadrangulación de P_8 .

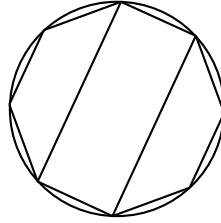


Figura 4: Ejemplo de una cuadrangulación de P_8 .

Problema 4. Demuestre que todas las cuadrangulaciones de P_{12} tienen el mismo número de cuadriláteros.

Problema 5. Demuestre que si m es impar entonces P_m no admite una cuadrangulación.

Problema 6. Explique como construir una cuadrangulación de P_m cuando m es par.

Problema 7. Encuentre todos los valores de k para los que existe una partición de un polígono regular de 2020 lados usando sólo polígonos de k lados.

Problema 8. Dado k , encuentre los valores de m para los cuales P_m admite una partición en polígonos de k lados. Proponga un método que encuentre una partición de P_m en polígonos de k lados cuando esto sea posible.