XIII

CMAT Campeonato Escolar de Matemáticas

Primera Fecha
25 de Abril de 2015
Nivel Menor
Grupal

Se entrega una respuesta por equipo

Dividiendo cuadrados en rectángulos

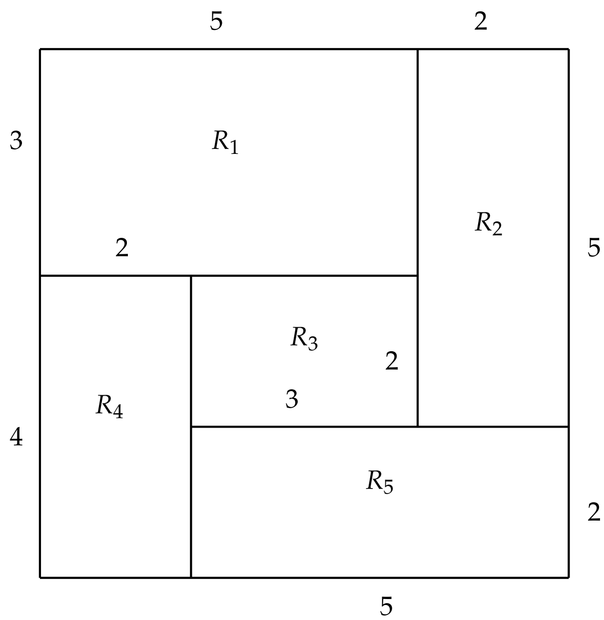
Si consideramos un cuadrado de 2×2 podemos dividirlo en dos rectángulos de 2×1 o de 1×2. Es fácil ver que esta es la única manera de dividir dicho cuadrado en rectángulos menores.

Si consideramos un cuadrado de 3×3 podemos dividirlo de varias maneras en rectángulos menores:

1. Un rectángulo 2×3 y otro 1×3
2. Un rectángulo 3×2 y otro 3×1
3. Tres rectángulos 1×3
4. Tres rectángulos 3×1
5. Tres rectángulos 2×1 y uno 1×3

Diremos que una descomposición de un cuadrado $n \times n$ es *trivial* si se descompone en rectángulos y al menos dos de ellos tienen un lado igual (ancho o largo). Todas las descomposiciones anteriores del cuadrado de 3×3 son triviales.

El siguiente dibujo muestra una descomposición trivial del cuadrado de 7×7:



Sean a_i, b_i, los lados del rectángulo i. Observamos que se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

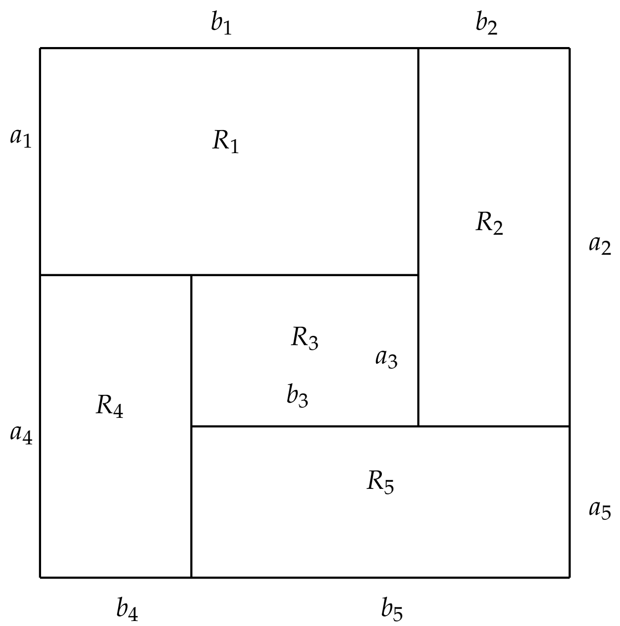
$$
\begin{aligned}
a_1 + a_4 &= 7 \\
b_1 + b_2 &= 7 \\
a_2 + a_5 &= 7 \\
a_1 + a_3 + a_5 &= 7
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
b_5 + b_4 &= 7 \\
b_4 + b_3 + b_2 &= 7 \\
a_2 + a_4 - a_3 &= 7 \\
a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5 &= 49
\end{aligned}
$$

Escribiendo $R = (\text{ancho}, \text{largo})$ tenemos

$$R_1 = (3,5), \quad R_2 = (5,2), \quad R_3 = (2,3), \quad R_4 = (4,2), \quad R_5 = (2,5)$$

Decimos que el rectángulo $R_1 = (a, b)$ es *equivalente* al rectángulo $R_2 = (c, d)$ si ocurre que $a = d$ y $b = c$. Vemos que la división del cuadrado de 7×7 se ocupan dos rectángulos equivalentes (a saber, R_2 y R_5).

Diremos que una descomposición del cuadrado de lado n es *básica* si ocurre que el cuadrado se descompone en 5 rectángulos como en la figura.



Aquí todos los valores a_i, b_i son números naturales. Notamos que se deben cumplir las siguientes relaciones.

$$
\begin{aligned}
b_1 + b_2 &= n \\
a_2 + a_5 &= n \\
b_4 + b_5 &= n \\
a_1 + a_4 &= n \\
b_2 + b_3 + b_4 &= n
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
a_2 + a_4 - a_3 &= n \\
a_3 + a_5 &= a_4 \\
b_1 + b_5 - b_3 &= n \\
a_1 + a_3 + a_5 &= n \\
a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5 &= n^2
\end{aligned}
$$

Problema 1: Presenten una descomposición básica del cuadrado de lado 12 con rectángulos de tal forma que no son dos de ellos equivalentes.

Pregunta 2: Presenten una descomposición básica del cuadrado de lado 13 con rectángulos de tal forma que no son dos de ellos equivalentes.

Diremos que una descomposición básica del cuadrado de lado n es *no trivial* si los lados de los rectángulos son todos distintos entre ellos.

Pregunta 3: Presenten una descomposición básica no trivial del cuadrado de lado 16.

Pregunta 4: Presenten una descomposición básica no trivial del cuadrado de lado 17.

Hasta aquí ha sido posible encontrar soluciones al problema por inspección. O sea, dando valores. Notamos que no hemos colocado ninguna restricción sobre qué números usar para resolver el problema. Apenas, que no hayan dos lados iguales. Observamos que cada solución básica no trivial ocupa diez números distintos.

Ahora vamos a solicitar mayor rigor y ocupar las ecuaciones asociadas a una descomposición básica.

Pregunta 5: Usando los valores $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ y 10, para los lados de los rectángulos, construyan una descomposición básica no trivial del cuadrado de lado 11. ¿Cuántas descomposiciones de este tipo existen?