

# Guía 12

## Campeonato Escolar de matemáticas

1. Pruebe que si  $x, y, z$  son números reales distintos de cero con  $x + y + z = 0$ , entonces

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{z^2 + y^2}{z + y} + \frac{x^2 + z^2}{x + z} = \frac{x^3}{yz} + \frac{z^3}{yx} + \frac{y^3}{xz}$$

2. Sean  $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$  tales que  $a + b + c = 0$  y  $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$ . Pruebe que

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}$$

3. Sean  $a, b, c, d$  enteros. Pruebe que  $a + b + c + d$  divide a

$$2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 8abcd$$

4. Encuentre las soluciones complejas de la ecuación

$$(x + 1)(x + 21)(x + 3)^2(x + 4)(x + 5) = 360$$

5. Encuentre las soluciones reales de la ecuación

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z - 2} + \sqrt{u} + \sqrt{v} = x + y + z + u + v$$

6. Encuentre las soluciones reales de la ecuación

$$(x + y)^2 = (x + 1)(y - 1)$$

7. Resuelva la ecuación

$$\sqrt{x + \sqrt{4x + \sqrt{16x + \sqrt{\dots + \sqrt{4^n x + 3}}}} - \sqrt{x}} = 1$$

8. ¿Cuántos enteros hay entre los números  $\frac{1 \cdot m}{n}, \frac{2 \cdot m}{n}, \dots, \frac{p \cdot m}{n}$ ?

9. ¿Cuántos números enteros de 7 dígitos no comienzan ni terminan en 1?